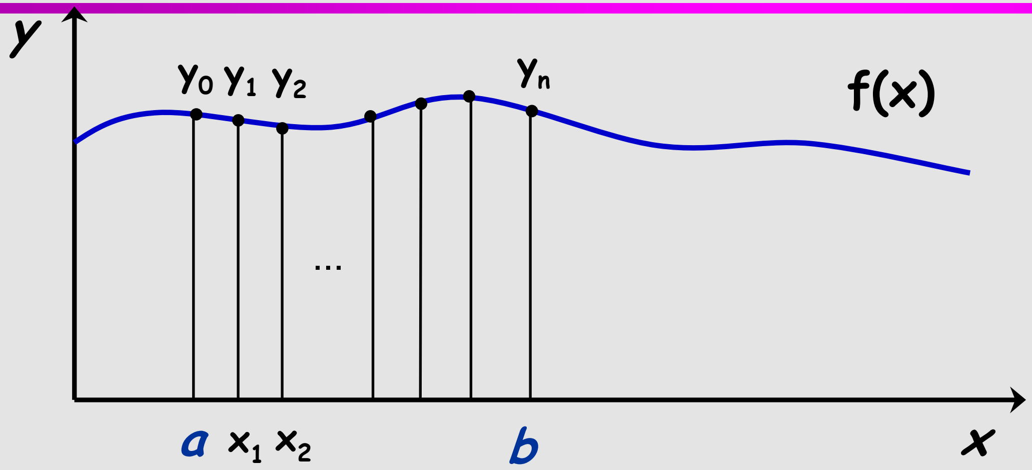
Решение обычных дифференциальных уравнений

Сеточные функции



- Пусть задана непрерывная функция $f(x)$ на участке [a,b].
- Введем дискретный набор точек x_i, сетку.
- Точки $\{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\}$ – узлы сетки
- Сетка с одинаковым расстоянием между произвольной парой соседних точек – равномерная сетка.
- $y_i=f(x_i)$ – сеточная функция

Разности

- Можно ввести аналог производной для сеточной функции

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_i} dx \quad \to \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$ – правая разность

- Также задается

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$ – левая разность

$$\delta y_i = \frac{1}{2}(\Delta y_i + \nabla y_i) = \frac{1}{2}(y_{i+1} - y_{i-1})$$ – центральная разность

- В общем случае

$$\Delta^m y_i = \Delta(\Delta^{m-1} y_i)$$

Разности

Полезные выражения

- **Производные второго порядка**

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$\Delta\nabla y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$$

$$\Delta\nabla y_i = \Delta^2 y_{i-1}$$

- **Дифференцирование произведения**

$$\Delta(y_i v_i) = y_i \Delta v_i + v_{i+1}\Delta y_i = y_{i+1}\Delta v_i + v_i \Delta y_i$$

$$\nabla(y_i v_i) = y_i \nabla v_i + v_{i-1}\nabla y_i = y_{i-1}\nabla v_i + v_i \nabla y_i$$

- **Суммирование по частям**

$$\sum_{i=0}^{N-1} y_i \Delta v_i = -\sum_{i=1}^{N-1} v_i \Delta y_i + y_{N-1} v_N - y_0 v_1 = -\sum_{i=0}^{N} v_i \Delta y_i + y_N v_N - y_0 v_0$$

Разностные уравнения

- **Линейное разностное уравнение m-го порядка**

$$\boxed{a_0(i)y_i + a_1(i)y_{i+1} + a_2(i)y_{i+2} + \ldots + a_m(i)y_{i+m} = f(i)}$$

или

$$\boxed{\alpha_0(i)y_i + \alpha_1(i)\Delta y_i + \alpha_2(i)\Delta y_i^2 + \ldots + \alpha_m(i)\Delta y_i^m = f(i)}$$

- **Например**

$$\boxed{a_0(i)y_i + a_1(i)y_{i+1} = f(i)}$$ **- уравнение первого порядка**

Решение $$\boxed{y_{i+1} = \varphi(i) + \beta(i)y_i}$$

Если задано граничное условие y_0=const,
все остальные значения находятся последовательно

Разностные уравнения

Граничные условия

- Аналогично дифференциальным уравнениям чтобы найти частное решение требуется задать граничные условия.
  - уравнение первого порядка – один параметр
  - уравнение второго порядка – два параметра и т.д.

- Согласно заданным условиям уравнения второго порядка можно классифицировать как
  - Задача Коши. Заданы граничные условия в двух соседних точках.
  - Краевая задача. Заданные точки не являются соседними.

- Граничные условия могут быть первого, второго и третьего рода.

Уравнения первого порядка

Метод Эйлера

- Пусть задана система уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1(x), y_1(x), \ldots y_1(x)), \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad a \le x \le b, \qquad y_i(a) = \alpha_i$$

(здесь y_i – разные функции)

- Решение будет искаться ввиде

$$y_i(x_{k+1}) = y_i(x_k) + h \cdot f_i(x_k, y_1(x_k), y_2(x_k), \ldots y_n(x_k)),$$

где h – шаг сетки

- Ошибка дискретизации ~h

Уравнения первого порядка

Методы Рунге-Кутта

- **Метод Рунге-Кутта второго порядка (Метод Хьюна) ε ~ h²**

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \frac{h}{2}\cdot\left(f(x_k, y(x_k)) + f\left(x_{k+1}, y(x_k) + h\cdot f(x_k, y(x_k))\right)\right),$$

- **Метод Рунге-Кутта-Фельберга ε ~ h⁵**

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{1}{9}k_0 + \frac{9}{20}k_2 + \frac{16}{45}k_3 + \frac{1}{12}k_4$$

$$k_0 = h\cdot f\left(x_i; y_i\right);$$

$$k_1 = h\cdot f\left(x_i + \frac{2}{9}h; y_i + \frac{2}{9}k_0\right);$$

$$k_2 = h\cdot f\left(x_i + \frac{1}{3}h; y_i + \frac{1}{12}k_0 + \frac{1}{4}k_1\right);$$

$$k_3 = h\cdot f\left(x_i + \frac{3}{4}h; y_i + \frac{69}{128}k_0 - \frac{143}{128}k_1 + \frac{135}{64}k_2\right);$$

$$k_4 = h\cdot f\left(x_i + h; y_i - \frac{17}{12}k_0 + \frac{27}{4}k_1 - \frac{27}{5}k_2 + \frac{16}{15}k_3\right);$$

Линейные уравнения второго порядка

- **Например уравнение дрифт-диффузии**

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$$

$$J = q\mu_n nE + \mu_n k_B T\,\frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial n}{\partial t} - D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - q\mu_n E\frac{\partial n}{\partial x} - q\mu_n n\frac{\partial E}{\partial x} = 0$$

это уравнение в частных производных. Можно решать стационарное уравнение, приравняв нулю производную по времени.

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + A\frac{\partial n}{\partial x} + Bn = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{n(x_{i+1}) - 2n(x_i) + n(x_{i-1})}{h^2} + A_i\,\frac{n(x_{i+1}) - n(x_{i-1})}{2h} + B_i n(x_i) = 0$$

Линейные уравнения второго порядка

2D уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-f(x_1,x_2)$$

- уравнение в частных производных

Функция *u* определена на всей границе – задача Дирехле $u|_B=\mu(x_1,x_2)$

Разностное уравнение

$$\frac{y(i_1-1,i_2)-2y(i_1,i_2)+y(i_1+1,i_2)}{h_1^2}+\frac{y(i_1,i_2-1)-2y(i_1,i_2)+y(i_1,i_2+1)}{h_2^2}=-f(i_1,i_2)$$

Линейные уравнения второго порядка

Метод прогонки

- Разностное уравнение

$$\boxed{a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i}$$

с граничными условиями

$$\boxed{y_0 = \eta_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = \eta_2 y_{N-1} + \mu_2}$$

можно представить ввиде матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & -\eta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{N-2} & b_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\eta_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ -f_1 \\ -f_2 \\ \dots \\ -f_{N-2} \\ -f_{N-1} \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

Метод прогонки

Алгоритм

- Предположим соотношение $\boxed{y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}}$

  где коэффициенты определены как

$$\boxed{\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + f_i}{c_i - a_i \alpha_i};}$$

  с граничными условиями $\boxed{\alpha_1 = \eta_1; \quad \beta_1 = \mu_1;}$

- За один проход **->** можно расчитать все коэффициенты α_i β_i.

Метод прогонки

Алгоритм

- **Теперь идем <- и считаем** $$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$$

где y_N находится из граничных условий

$$y_N = \frac{\mu_2 + \eta_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \eta_2}$$

END

Литература

- **Самарский А.А., Введение в численные методы.**
- **Ортега Дж., Пул У., Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений.**

The End